

КАСАТКИ И В.В.

**ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ГРАФИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ МАТЕМАТИКИ**

под редакцией К.Т.Н. Сивкова Г.А.

МОСКВА

1989

## ВВЕДЕНИЕ

Проведение расчетов с помощью натурального ряда чисел было обусловлено представлением человека о дискретном количестве предметов, абстрактным понятием числа. Но когда кроме счета отдельных предметов потребовались измерения расстояний, линейных размеров тел — длины, ширины, высоты, а также площади поверхностей и объемов, то возникла необходимость измерения размеров, площадей и объемов — непрерывных величин тел. Однако, наряду с простотой дискретного счета возникли трудности, связанные с его недостатками и переходом от линейных размеров к площадям и объемам.

Например, как определить длину ребра такого куба, объем которого был бы в tenюсти в 2 раза больше объема известного? Эта задача, несмотря на кажущуюся ее простоту, оказалась неразрешимой в конечных числах, т.е. величина  $\sqrt[3]{2}$  не может быть выражена таким числом, возведением которого в третью степень дано бы число 2.

Есть примеры и других трехмерных чисел (II, в = 2, ТИЖИ... — Например число, связанное с натуральными логарифмами и т.д.). То есть возникает необходимость создания некоторой другой системы множественного решения практических задач, позволяющей преодолеть указанные недостатки.

В настоящее учебное пособие предложен способ решения пространственных задач, в основу которого положены не линейные размеры тел, а непосредственно объекты, причем без применения систем дискретного счета.

Например, ставится задача построения куба любого заданного объема, которая решается путем бесконечных геометрических построений. Классическая задача "об удвоении куба" является частным случаем указанной выше. Кроме заданной измеренной линейной длины, а объем, можно в задачу измерения отбросить без применения чисел, т.е. решать задачи о пространственных измерениях тел, без математических построений.

Так, например, кроме заданной измеренной радиусом некоторой окружности, можно представить собой длину  $\delta$  размер в виде дуги длиной от нуля до двух единиц. А по хорде — объем:

от нуля до восьми единиц, причем с непрерывным перекрытием всего указанного (от 0 до 8) диапазона. Однако, так как за единицу можно принять любой (произвольный) размер, то появляется возможность создания принципиально новой непрерывной системы точных измерений любых линейных величин, площадей поверхностей и объемов для решения практических задач.

Автор предполагаемого метода в своих обоснованных опираясь на геометрические построения о помощи географического циркуля Василия Прохоровича Горюхина, который с помощью лишь циркуля и линейки решил "некорректные" задачи, а именно:

в трехмерном пространстве рассчитывал три вида движения: поступательное, вращательное и винтовое. В своих трудах В.П.Горюхин указывал, что с помощью двух угольников разрешима задача "удвоения куба".

Предлагаемая изобретательная работа В.В.Касаткина является логическим продолжением работ В.П.Горюхина и открывает принципиально новое направление в пространственной инженерной геометрии. Несмотря на нетрадиционный подход, непривычный математический аппарат, при детальном рассмотрении данный метод обнаруживает безусловное удобство при определении форм и размеров пространственных объектов.

Академик

И.Ф.ОБРАЗЦОВ

## 1. СОКРАЩЕННАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. КУБ АВ - это объем куба, длина ребра которого равна длине отрезка прямой АВ.

ПРИМЕРЫ: Куб гипотенузы, куб катета, куб диаметра - это объемы кубов, ребром которых является гипотенуза или катет данного прямоугольного треугольника, или диаметр данной окружности.

2. КУБ  $x$  - это объем куба, численно равный величине  $x$ .

ПРИМЕР: Куб  $\sqrt{8}$  - это объем куба, численно равный  $\sqrt{8}$ .

3. ПРИЛЕЖАЮЩИЙ КАТЕТ - это катет, лежащий на диаметре окружности и имеющий с ним общую начальную точку.

4. ИЗВЕСТНЫЙ КУБ - это куб, объем которого имеет точное численное значение, равное третьей степени известного рационального числа, которому численно равна длина ребра куба.

5. СОПРЯЖЕННЫЕ КУБЫ - это кубы, объемы которых связаны однозначной зависимостью.

ПРИМЕР: Кубы, построенные на гипотенузе и одним из катетов данного прямоугольного треугольника.

6. ИЗВЕСТНЫЙ КУБ ДИАМЕТРА - это такой известный куб, ребро которого лежит на диаметре и является его частью, а длина ребра точно определена и численно равна известному рациональному числу.

7. РЕШИТЬ КУБ - это значит определить точно все его геометрические характеристики: объем, площадь грани, длины диагоналей ребра, диагоналей грани и ребра, не требуя обязательного их количественного выражения в системе натурального числового ряда.

## 2. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ

### ТЕОРЕМА 1 (ПЕРВОЕ ПРАВИЛО)

В прямоугольном треугольнике ABC (рис.1), гипотенуза АВ которого есть хорда окружности с диаметром АД, а катет АС есть проекция гипотенузы АВ на диаметр АД, куб гипотенузы равен корню квадратному из произведения куба прилежащего катета на куб диаметра.

ДАНО: Окружность с диаметром АД =  $d$  и радиусом  $r$ ; прилежащий катет АС =  $a$ .

ДОКАЗАТЬ:  $b^3 = \sqrt{a^3 d^3}$  где  $b$  - длина хорды АВ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проведем хорду ВД (рис.1). Тогда согласно известной теореме  $b = \sqrt{ad}$ . Следовательно  $b^3 = \sqrt{a^3 d^3}$ . Если принять  $r = 1$ , т.е.  $d = 2$ , тогда  $b^3 = \sqrt{8a^3}$ ;  $b = \sqrt{2a}$ .

ПРЕДСВИДЕ: Если известна длина катета АС =  $a$ , то для геометрического построения ребра куба гипотенузы АВ достаточно из точки В составить перпендикуляр к диаметру АД. Точка пересечения перпендикуляра с окружностью определит положение точки В и, следовательно, длину ребра АВ.

### ТЕОРЕМА 2 (ВТОРОЕ ПРАВИЛО)

В треугольнике ABC (рис.1) куб прилежащего катета АС равен отношению куба гипотенузы во второй степени к кубу диаметра АД.

ДАНО: Окружность с диаметром АД =  $d$  и радиусом  $r$ ; хорда - гипотенуза АВ =  $b$ ; прилежащий катет АС =  $a$ .

ДОКАЗАТЬ: куб прилежащего катета  $a^3 = \frac{(b^3)^2}{d^3}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Согласно теореме 1  $b = \sqrt{a^3 d^3}$ . Следовательно,  $a^3 = \frac{(b^3)^2}{d^3}$ . Если  $r = 1$ , то  $\text{куб}(a^3) = \frac{\text{куб}(b^3)^2}{8}$ .

### ТЕОРЕМА 3.

Если из одной и той же точки А окружности провести две хорды и диаметр, то произведение длин хорд будет равно произведению длины диаметра на длину проекции на диаметр одной из хорд, наложенной на другую хорду путем поворота относительно

точки А на угол между хордами.

ДАНО: хорды  $AB = b$  и  $AB_1 = b_1$ ; диаметр  $AD = d$ ; длины проекций на диаметр хорд, наложенных одна на другую путем поворота на угол  $BAB_1$ , равны  $x$  и  $x_1$ .

ДОКАЗАТЬ:  $b \cdot b_1 = x d = x_1 d$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: На хорду  $AB_1$  наложим хорду  $AB$  путем поворота последней на угол  $BAB_1$  (рис.2). Тогда конец хорды  $AB$  попадает в точку  $F$  (точка перемножения), лежащую на продолжении хорды  $AB_1$ , и длина отрезка  $AF$  будет равна  $b$ . Опустив из точек  $F$  и  $B_1$  перпендикуляры на диаметр  $AD$ , обозначим основания перпендикуляров через  $K$  и  $C_1$ , а длины катетов  $AK$  и  $AC_1$  соответственно — через  $x$  и  $y$ .

Согласно известной теореме  $b_1 = \sqrt{y \cdot d}$ , откуда

$$y = \frac{b_1^2}{d} \quad (1)$$

Треугольники  $AKF$  и  $AB_1C_1$  подобны. Поэтому  $\frac{y}{x} = \frac{b_1}{b}$

откуда 
$$y = \frac{b_1 x}{b} \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем  $\frac{b_1^2}{d} = \frac{b_1 x}{b}$ , откуда

$$b b_1 = x d \quad (3)$$

Аналогично на хорду  $AB$  наложим хорду  $AB_1$  путем поворота последней на угол  $B_1AB$  (рис.3). Тогда конец хорды  $AB_1$  попадет в точку  $F_1$  (вторая точка перемножения), и длина отрезка  $AF_1$  будет равна  $b_1$ . Опустив из точек  $F_1$  и  $B$  перпендикуляры на диаметр  $AD$ , обозначим основания перпендикуляров через  $K_1$  и  $C$ , а длины катетов  $AK_1$  и  $AC$  — соответственно — через  $x_1$  и  $y$ . Согласно известной теореме  $b = \sqrt{y \cdot d}$ , откуда  $y = \frac{b^2}{d}$  (4)

Треугольники  $AF_1K_1$  и  $ABC$  подобны. Поэтому  $\frac{y}{x_1} = \frac{b}{b_1}$ , откуда 
$$y = \frac{x_1 b}{b_1} \quad (5)$$

Из равенств (4) и (5) найдем  $\frac{b^2}{d} = \frac{x_1 b}{b_1}$ , откуда

$$b b_1 = x_1 d \quad (6)$$

Из равенства (3) и (6) получим

$$\frac{b b_1}{d} = x \quad ; \quad \text{и} \quad \frac{b b_1}{d} = x_1$$

Следовательно  $x = x_1$  и точка  $K$  совпадает с точкой  $K_1$ , а точки  $F$  и  $F_1$  лежат на одной прямой, перпендикулярной к диаметру.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если радиус окружности принять за единицу, то произведение длин двух хорд  $b \cdot b_1$ , выходящих из одной точки А, будет численно равно длине отрезка диаметра  $AE = 2x$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Для геометрического построения произведения длин двух хорд  $AB$  и  $AB_1$ , выходящих из одной точки А, достаточно радиусом  $AB = b$  (или  $AB_1 = b_1$ ) с центром в точке А провести дугу окружности  $BF$  (или  $B_1F_1$ ) от точки В (или  $B_1$ ) до пересечения с хордой  $AB_1$  (или  $AB$ ) или ее продолжением — в точке  $F$  (или в точке  $F_1$ ) в том же радиусом  $BA = b$  (или  $B_1A = b_1$ ) с центром в полученной точке  $F$  (или  $F_1$ ) провести дугу от точки А до пересечения ее в точке  $E$  с диаметром  $AD$ , проведенным из общей точки А хорд  $AB$  и  $AB_1$ . Длина полученного отрезка  $AE$  будет равна

$$2x = \frac{2}{d} b b_1 = \frac{b b_1}{r}$$

Если радиус окружности  $r$  принять за единицу, то длина отрезка  $AE = l$  будет численно равна произведению длин хорд

$$b b_1 = l$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: На диаметре  $AD$  (рис.3) от точки  $K$  в направлении точки  $D$  отложим длину  $x = \frac{b b_1}{d}$  и полученную точку  $E$  соединим с точкой  $F$  (или с точкой  $F_1$ ). Так как  $AK = KE$ , а

прямая  $KF$  (или  $KF_I$ ) перпендикулярна диаметру  $AD$ , то треугольник  $AEF$  (или  $AEF_I$ ) равнобедренный, т.е.  $FA = FE$  (или  $F_I A = F_I E$ ). Следовательно, дуга с центром в точке  $F$  (или в точке  $F_I$ ), проведенная радиусом  $FA = b$  (или  $F_I A = b_I$ ) от точки  $A$  до пересечения с диаметром  $AD$ , попадает точно в точку  $E$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Если радиус окружности принять за единицу, то произведение объемов кубов, построенных на хордах  $AB$  и  $AB_I$ , выходящих из одной точки  $A$ , численно равно объему куба, построенного на отрезке  $AE$  диаметра  $AD$  или его продолжения

$$\text{Куб } AE = \text{Куб } AB \cdot \text{Куб } AB_I.$$

**СЛЕДСТВИЕ 4.** Арифметическую операцию перемножения двух величин можно производить без принципиальной математической погрешности, если для этого не использовать системы дискретного счета, основанной на натуральном ряде чисел.

#### ТЕОРЕМА 4

Если из одной и той же точки  $A$  окружности радиуса  $\gamma$  (рис. 4) провести две хорды  $AM$  и  $AB$  и диаметр  $AD$ , то частное от деления длины хорды  $AM = q$  (делимого) на длину хорды  $AB = b$  (делителя) будет равно длине хорды  $AB_I = b_I$  (частного), поделенной на радиус окружности  $\gamma$ , где точка  $B_I$  есть точка пересечения прямой  $FA$  с окружностью, а точка  $F$  лежит на пересечении дуг делителя, проведенных из центров  $A$  и  $E$  - концов отрезка  $q$  диаметра радиусом " $\gamma$ ", равным длине хорды - делителя.

ДАНО: Окружность радиуса  $\gamma$ ; (рис. 4), хорда  $AM = q$  - делимое;  
хорда  $AB = b$  - делитель.

**Требуется доказать:**  $\frac{q}{b} = \frac{b_I}{\gamma}$ , где  $b_I = AB_I$ , точка  $B_I$  лежит на пересечении прямой  $FA$  с окружностью, а точка  $F$  - на перпендикуляре  $FK$ , проведенном из середины  $K$  отрезка диаметра  $AE = q$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Согласно построению хорды  $b_I$  и на основании теоремы 3 произведение  $b b_I = q \gamma$ , откуда  $\frac{q}{b} = \frac{b_I}{\gamma}$

что и требовалось доказать.

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Если радиус окружности принять за единицу, то частное от деления длин двух хорд  $\frac{q}{b}$  будет численно равно длине хорды  $b_I$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Для геометрического определения частного от деления длины хорды  $AM$  на длину хорды  $AB$ , имеющих общую точку  $A$ , достаточно: - из центра в точке  $A$  радиусом  $AM = q$  (делимое) провести засечку на диаметре  $AD$  в точке  $E$ ;

- из центров в точках  $A$  и  $E$  дугами радиусом " $b$ " (делитель) произвести засечку в точке  $F$ ;

- провести прямую  $FA$ , точка  $B_I$  пересечения которой с окружностью определит искомую хорду  $AB_I = b_I$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:** Геометрическое построение процесса деления осуществляется в обратном порядке процессу умножения, т.е. производится переход от известного делимого (произведения) через известный делитель (множитель) к неизвестному частному (второму множителю), для чего произведение (делимое) нужно расположить на диаметре в виде отрезка  $AE$ , разделить отрезок  $AE$  пополам и из полученной его середины - точки  $K$  - восстановить перпендикуляр. На основании известной теоремы последняя операция производится путем засечек дугами с известным радиусом " $b$ " из центров  $A$  и  $E$  - концов отрезка  $AE$  - по обе стороны от отрезка. Точки пересечения дуг - засечек и будут лежать на искомом перпендикуляре, пересекающем отрезок  $AE$  в его середине - в точке  $K$ . Но нам нет необходимости проводить сам перпендикуляр, а достаточно лишь отыскать точку  $F$ , которая, согласно теореме 3, должна лежать на пересечении перпендикуляра  $FK$  с дугой с центром в точке  $A$  и радиусом " $b$ ", каковой и является точка пересечения дуг-засечек. Далее, согласно теореме 3, второй множитель  $b_I$  находится путем проведения прямой  $FA$ , точка  $B_I$  пересечения которой с окружностью определит искомую хорду  $AB_I = b_I$ , что и требовалось доказать.

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Если радиус окружности принять за единицу, то частное от деления объемов кубов, построенных на хордах  $AM$  и  $AB$ , выходящих из одной точки  $A$ , численно равно объему куба,

построенного на хорде  $AB_T$ .

$$\text{Куб } AM : \text{Куб } AB = \text{Кубу } AB_T.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Арифметическую операцию деления одной величины на другую можно производить принципиально точно, без методической погрешности, если для этого не использовать системы дискретного счета, основанной на натуральном ряде числе.

### 3. Возведение в степень и извлечение корня.

Возведение в степень производится последовательным умножением на основание или на его промежуточную степень. Например, возведение некоторой величины  $x$  в пятую степень можно выполнить как последовательное умножение

$$x \cdot x = x^2; x^2 \cdot x = x^3; x^3 \cdot x = x^4; x^4 \cdot x = x^5$$

или умножением на промежуточные степени

$$x \cdot x = x^2; x^2 \cdot x^2 = x^4; x^4 \cdot x = x^5.$$

Порядок геометрического построения произведения остается без изменения. Особенность состоит в том, что при одинаковых сомножителях точка  $F$  (рис. 2) будет лежать точно на окружности. В остальном порядок действий не изменится. Заметим, что если основание меньше единицы (радиуса круга) то при последовательных умножениях величина степени, естественно, будет возрастать, а если основание - меньше единицы, то соответственно - будет убывать.

Извлечение корня  $n$ -й степени возможно путем последовательного деления степени на основание, причем для этого, очевидно, необходимы как исходная величина степени, так и основание. Деление производится в обычном порядке.

#### 4. "Неизвестные" кубы.

##### 4.1. Некоторые термины.

"Неизвестный" кубом называется куб, длина ребра которого не может быть выражена рациональным числом. Например, куб 2, имеющий объем, равный двум кубическим единицам, имеет ребро, длина которого, равная  $\sqrt[3]{2}$ , не может быть выражена рациональным числом, третья степень которого в точности равнялась бы двум.

Сопраженными кубами называются кубы, геометрические характеристики которых связаны однозначными зависимостями. Например, сопряженными кубами будут кубы, построенные на хорде данной окружности - гипотенузе и прилежащем катете соответствующего прямоугольного треугольника.

Точка переименования кубов - это точка  $F$  (или  $F_T$ ). На рис. 3, представляющая собой конец одной из хорд-сомножителей, наложенной на другую хорду-сомножитель. Для получения произведения хорд из этой точки как из центра радиусом, равным длине наложенной хорды - сомножителя описывается дуга от точки  $A$  начала диаметра до пересечения с ним в точке  $E$ . Эта дуга называется дугой переименования кубов. Равнобедренный треугольник  $AFE$  (или  $AF_T E$ ) с вершиной в точке  $F$  (или  $F_T$ ) и основанием, равным произведению хорд  $bb_1$ , называется равнобедренным треугольником переименования кубов. Перпендикуляр  $FK$ , опущенный из точки переименования кубов на диаметр  $AD$ , называется координатной линией  $KV$  произведения кубов.

#### 4.2. Свойства сопряженных кубов.

Лемма I. Отношение прилежащего катета к гипотенузе равно отношению гипотенузы к диаметру окружности (рис. 1). Если радиус окружности принять за единицу, то отношение прилежащего катета к гипотенузе численно равно половине гипотенузы, а отношение объема куба прилежащего катета к объему куба гипотенузы численно равно  $\frac{1}{8}$  объема куба гипотенузы.

ДАНО:  $AC = a$  - прилежащий катет;

$AB = b$  - гипотенуза; точка  $B$  - на окружности;

$AD = d$  - диаметр окружности.

ДОКАЗАТЬ:  $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}; \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{d^3}$  при  $\gamma = 1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Проведем прямую  $BD$ . Треугольники  $ABC$  и  $ABD$

подобны, так как имеют общий угол  $A$ . Отсюда  $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$

Если принять  $\gamma = 1$ , т.е.  $d = 2$ , то  $\frac{a}{b} = \frac{b}{2}$  и  $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{8}$

СЛЕДСТВИЕ I. Если объем куба гипотенузы выражается рациональным числом, то и объем  $n$ -куба прилежащего катета выражается также рациональным числом.

Из леммы I следует, что куб  $(a^3) = \frac{1}{8} [\text{куб}(b^3)]^2$

Если  $b^3 = m$  - рациональное число, то и куб  $n = \text{куб}(a^3) = \text{куб} \frac{m^2}{8}$  - рациональное число.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если объем куба гипотенузы выражается рациональным числом  $m$ , то произведение куба прилежащего катета на куб гипотенузы всегда является "известным" кубом, т.е. численно равно объему такого куба, ребро которого имеет длину, выражаемую рациональным числом.

ДАНО:  $m$  - объем куба гипотенузы - рациональное число;  
 $n$  - объем куба прилежащего катета.

ДОКАЗАТЬ: произведение  $m \cdot n$  - рациональное число - "известный" куб.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Согласно лемме I  $\frac{n}{m} = \frac{1n}{8}$

$n = \frac{m^2}{8}$ ;  $m \cdot n = \frac{m^3}{8}$  - "известный куб", так как длина его ребра численно равна  $\frac{m}{2}$  - рациональное число, что и требовалось доказать.

#### 4.3. Построение "известных" кубов.

Из предыдущего известно, как построить куб прилежащего катета, если известно ребро сопряженного с ним куба гипотенузы, или как построить куб гипотенузы, если известно ребро сопряженного с ним куба прилежащего катета (рис. I).

Если сопряженные кубы являются "известными" кубами, т.е. длины их ребер не могут быть выражены рациональными числами, но объем одного из сопряженных кубов известен, то объем другого сопряженного куба точно определяется. Например, если объем куба гипотенузы равен  $m$  (куб  $m$ ), то согласно следствию I леммы I объем  $n$  куба прилежащего катета (куб  $n$ ) будет равен

$$\frac{m^2}{d^3}, \text{ а если принять } \gamma = 1, \text{ то } d = 2 \text{ и куб } n = \frac{\text{куб } m^2}{8} = \frac{\text{куб } m^2}{14^8(2^3)}$$

С другой стороны, если известен объем  $n$  куба прилежащего катета (куб  $n$ ) то объем  $m$  куба гипотенузы (куб  $m$ ) будет равен

$$\text{куб } m = \text{куб } \sqrt{8n}$$

Но как построить эти кубы, если длины их ребер нельзя точно определить, т.е. положение точек B и C неизвестно, несмотря на то, что объемы кубов  $m$  и  $n$  точно известны?

Для этого необходимо сначала найти положение координатной линии KU (рис. 5). Согласно следствию 2 леммы I, если известен куб гипотенузы, численно равный  $m$ , то произведение куба прилежащего катета (куба  $n$ ) на куб гипотенузы (куб  $m$ ) будет "известным" кубом  $\frac{m^3}{8}$  с длиной ребра, численно равной  $\frac{m}{2}$

Вспомним, что произведение кубов находится наложением хорды-ребра одного куба на ребро другого куба и проведением дуги с центром в точке перемножения кубов - точке F - конце наложенной хорды - радиусом F E до пересечения с диаметром в точке E. Отрезок диаметра AE =  $\ell$  будет ребром куба - произведением с длиной, численно равной  $\frac{m}{2}$ . Но так как треугольник AEF - равнобедренный, то для определения координаты  $x_1$  точки перемножения (т.е. положения координатной линии KU) достаточно отрезок AE разделить пополам. Середина этого отрезка - точка K - и будет иметь координату, численно равную

$$x_1 = \frac{m}{2d} \quad \text{а при } \gamma = 1 \quad x_1 = \frac{m}{4}$$

Таким образом, при заданном объеме куба гипотенузы, численно равном  $m$ , координата точки перемножения его с кубом прилежащего катета является строго определенной и численно равной  $\frac{m}{4}$

Теперь для определения положения точки B на окружности или точки C - проекции точки B на диаметр можно найти координату  $y_1 = KF$  (рис. 5) или координату  $x_2 = AK$ .

Для отыскания методики графического решения этой задачи

проследим, как будет меняться положение точки  $F$  перемножения сопряженных кубов при изменении параметров треугольника  $ABC$ .

Пусть точки  $B$  и  $C$  переместились в положение  $B_1$  и  $C_1$ . Тогда точка  $F$  переместится в положение  $F_1$ . По мере перемещения катета  $B_1C_1$  влево точка  $F_1$  также будет перемещаться влево. Так как каждому виду треугольника  $AB_1C_1$  будет соответствовать строго определенная точка перемножения  $F_1$ , то при своем перемещении точка  $F_1$  будет описывать единственную вполне определенную кривую ( $m$  н. кубоида), представляющую собой геометрическое место точек перемножения сопряженных кубов. Эта кривая пересечет однозначно определенную ранее координатную линию  $KU$  в единственной точке  $F$ , которая соответствует только заданному кубу  $m$  и однозначно определит точки  $B$  и  $C$ , т.е. искомые длины ребер кубов  $m$  и  $n$  и координату  $y_f$ .

Если расстояние  $AF$  вдоль хорды  $AB$  назвать координатой  $z$ , то  $AF = AC = x_f = z_f$ . Потому найденная единственная точка перемножения располагается на координатах  $x = z_f$ ,

$y = y_f$  и  $z = z_f$  и называется трехкоординатной точкой.

Теперь можно сформулировать порядок построения ребра куба любого заданного объема  $m$  (куба  $m$ ). Для этого от точки  $A$  (рис.5) на диаметре окружности  $AD$  откладывается координата точки перемножения  $x_f$ , численно равная  $x_f = \frac{m}{2a}$  (если  $z$  принять за единицу, то  $x_f = \frac{m}{4}$ ) и через нее проводится координатная линия  $KU \perp$  диаметру  $AD$ . Затем находится отрезок кубоида, пересекающий координатную линию  $KU$ , как геометрическое место точек  $F$  пересечения гипотенуз  $BA$  дурами с радиусами  $AC_1$  с центром в точке  $A$ .

Точка  $F$  пересечения кубоида и координатной линии  $KU$  соединяется прямой с точкой  $A$ , прямая  $AF$  продолжается до пересечения с окружностью в точке  $B$ . Радиусом  $AF$  с центром в точке  $A$  проводится дуга до пересечения диаметра  $AD$  в точке  $C$ . Точки  $B$  и  $C$  лежат на перпендикуляре к диаметру и определяют сколько длины ребра  $AB$  куба  $m$  — гипотенузы и длину ребра  $AC$  куба  $n$  — прилежащего катета.

Пример. Построить куб 7 гипотенузы и сопряженный ему куб прилежащего катета. Для этого находим координату  $x_f = \frac{m}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$

и, отложив ее по диаметру от точки  $A$  до точки  $K$ , проводим координатную линию  $KU$ , перпендикулярную диаметру  $AD$  (рис.5). Затем намечаем на окружности серию точек  $B_i$ ;  $B_{71}, B_{72}, B_{73}$  из каждой из них проводим перпендикуляр к диаметру в точки  $C_{71}, C_{72}, C_{73}$ , радиусами  $AC_i$  делаем засечки на соответствующих прямых  $AB_i$ ; соединим полученные точки плавной кривой. Это и есть кубоида. Точка пересечения ее с координатной линией  $KU$  есть искомая точка перемножения  $F_7$ . Проведя прямую  $AF_7$  до пересечения с окружностью, найдем искомую длину гипотенузы  $AB$  и соответствующий ей прилежащий катет  $AC$ .

По второму правилу (теорема 2) куб прилежащего катета будет равен

$$\text{куб } n = \frac{(\text{куб } 7)^2}{8} = 6,125.$$

В качестве еще одного примера приведем решение классической задачи об удвоении куба с помощью циркуля и линейки, которая до сих пор считалась неразрешимой (что было доказано еще в 1837 году).

Пусть исходный объем куба равен единице. Требуется построить куб, объем которого в точности равнялся бы двум ( $m = 2$ ).

Решение. Радиусом, равным единице проведем окружность, ее диаметр  $AD$  и из точки  $A$  — хорду  $AB_1$  длиной, равной радиусу, ( $z = 1$ ) (рис.6). На расстоянии  $AK$  от точки  $A$ , равном  $x_f = \frac{m}{4} = 0,5$

отложим координату точки перемножения кубов  $F_2$  и через нее проведем координатную линию  $K_2U_2$ . На окружности наметим серию точек  $B_{2i}$  ( $B_{21}, B_{22}, B_{23}, B_{24}, B_{25}$ ) и, проведем через них перпендикуляры к диаметру, получим соответствующие точки  $C_{2i}$ . Через каждую точку  $B_{2i}$  проведем прямую  $AB_{2i}$ , а через каждую точку  $C_{2i}$  — из центра  $A$  радиусом  $AC_{2i}$  до пересечения с соответствующей прямой  $AB_{2i}$ . Соединив все точки пересечения дуг с прямой плавной кривой, получим единственную для данной окружности кривую — кубоида, пересечение которой с координатной

линией  $K_2U_2$  даст искомую точку перемножения  $F_2$ . Продолжив прямую  $AF_2$  до пересечения с окружностью в точке  $B_2$ , найдем ребро искомого удвоенного куба  $AB_2$ .

### Б. Сложение и вычитание.

Геометрическое сложение и вычитание двух величин, представленных в виде отрезков, являются весьма простыми операциями. Для сложения длин двух отрезков  $a$  и  $b$  нужно на одной прямой отложить последовательно оба отрезка так, чтобы начало второго отрезка совпадало с концом первого. Тогда их общая длина и будет суммой двух величин  $a + b$ . Для вычитания нужно наложить отрезки один на другой так, чтобы их начала совпадали. Тогда расстояние между концами отрезков и будет представлять разность величин  $a - b$ .

Сумму объемов кубов можно найти таким же способом. Например, если объем куба  $a^3 = m$ , а объем куба  $b^3 = n$ , то, отложив последовательно по одной прямой отрезки длиной  $m$  и  $n$ , получим отрезок  $m + n$ , длина которого будет численно равна объему куба  $(m + n)$ . Ребро этого куба можно найти описанным в пункте 4.3 способом. Для этого нужно полученный отрезок  $(m + n)$  разделить на 4 (два раза пополам) и найденную координату  $x_r = \frac{m+n}{4}$  отложить по диаметру от точки А до точки К

$$AK = x_r = \frac{m+n}{4}$$

Затем, через точку К (рис.7) нужно провести прямую  $KU \perp AD$  и в окрестности прямой  $KU$  построить кубонду, так, чтобы она пересекала прямую  $KU$  (точка  $F$ ). Проводя прямую  $AF$  до пересечения с окружностью в точке  $B$ , получим искомую длину ребра куба  $(m + n)$ , равную  $AB$ .

Например, на рис.7 показана операция сложения куба 0,512 и куба 1,0

$$\text{Куб } 0,512 + \text{куб } 1,0 = \text{куб } 1,512.$$

Если известны не объемы кубов  $m$  и  $n$ , а ребра  $a$  и  $b$  куба  $(a^3) = m$ , и куба  $(b^3) = n$ , то для описанных

суммы объемов  $m + n$  нужно предварительно найти сами величины объемов  $m$  и  $n$  путем возведения в куб отрезков  $a$  и  $b$  способом, описанным в пункте 3, т.к.  $m = a^3$  и  $n = b^3$ , а затем продолжить операцию сложения описанным способом.

Операция вычитания производится аналогично.

Операцию сложения кубов можно произвести и другим путем, а именно, предварительно разложив сумму кубов на множители

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (7)$$

Все операции, имеющиеся в правой части равенства (7), если известны ребра  $a$  и  $b$ , выполняются описанными выше способами, в том числе и отыскивается ребро куба  $(a^3 + b^3)$ . Однако, этот способ более трудоемкий и не имеет преимуществ по сравнению с выше описанным простым сложением объемов кубов.

## В И В О Д И

1. Арифметические операции умножения и деления, сложения и вычитания можно выполнять принципиально точно, без методических погрешностей, если для этого не использовать системы дискретного счета, основанной на натуральном ряде чисел. При этом отпадает необходимость в использовании иррациональных чисел.

2. Арифметические операции сложения и вычитания с любыми величинами без использования системы дискретного счета возможны при условии построения специальной кривой - кубонды, представляющей собой геометрическое место точек пересечения дуг окружностей, с центром в точке А (рис.6) радиусами  $AC_i$  с хордами  $AB_i$ , где прямые  $B_iC_i$  являются перпендикулярами к диаметру  $AD$ .

В этом случае любой результат сложения или вычитания двух точно известных величин может быть определен также принципиально точно без методических погрешностей путем представления слагаемых и их суммы в виде объемов кубов:

$$a^3 + b^3 = c^3$$

или

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ , где величины  $a, b$ , и результаты операций сложения  $a + b$ ,  $a^2 - ab + b^2$ , возведения в степень  $a^2$  и  $b^2$ , и перемножения  $ab$  и  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$  могут быть найдены также принципиально точно, без методических погрешностей, если при этом не использовать системы дискретного счета, основанной на натуральном ряде чисел.

3. Кус любого заданного объема, в том числе и равного сумме объемов двух любых кубов  $m + n$ , может быть построен с помощью циркуля и линейки, принципиально точно без методических погрешностей по предлагаемому способу, не основанному на системе дискретного счета.

4. Частным случаем задачи построения куба любого объема является классическая задача об удвоении куба, решение которой, как было доказано в 1837 году, невозможно в системе дискретного счета, основанной на натуральном ряде чисел, и решение которой оказалось возможным, принципиально точное без методических погрешностей.

5. Система непрерывного счета может успешно конкурировать с системой дискретного счета, базирующейся на натуральном ряде чисел, если будут разработаны соответствующие элементы, выполняющие арифметические операции с достаточно малыми инструментальными погрешностями, удовлетворяющими запросам практики.

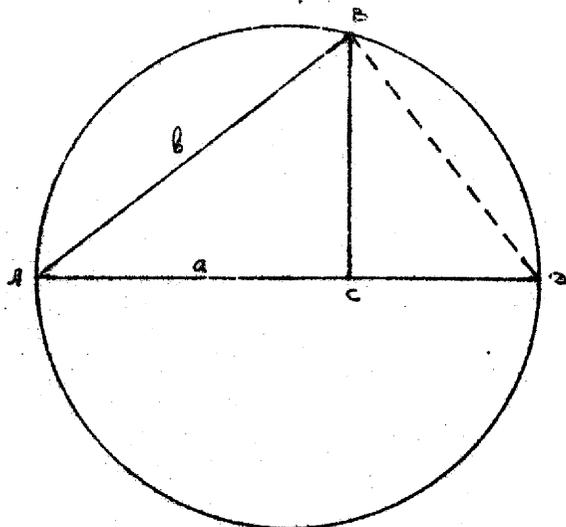


Рис. 1

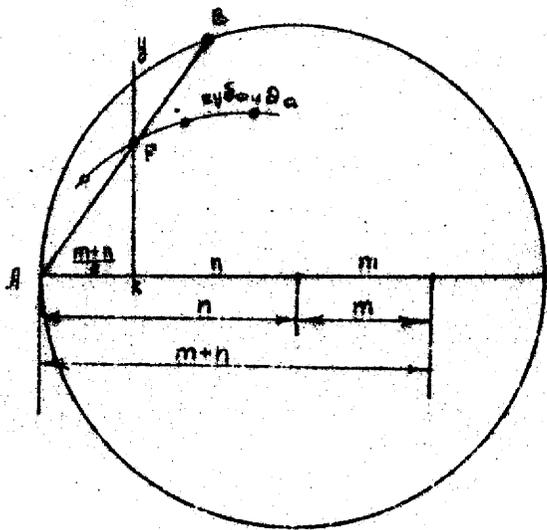


Рис. 7

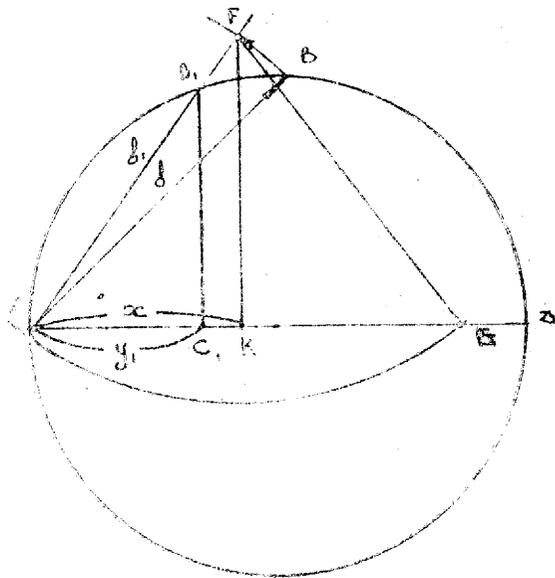


Рис. 2

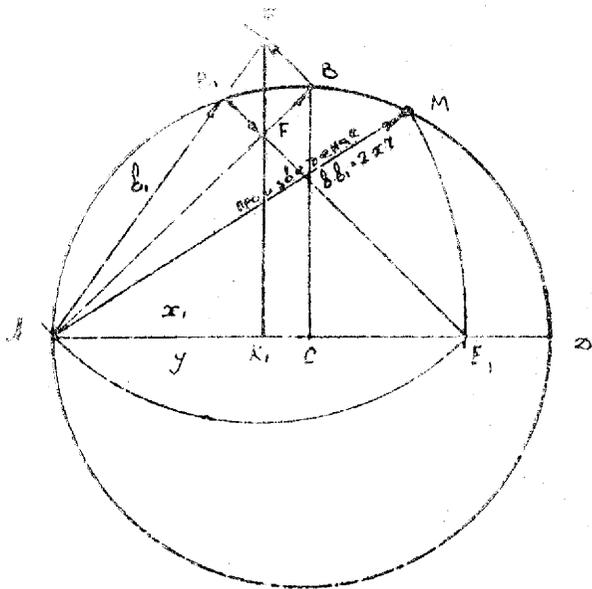


Рис. 3

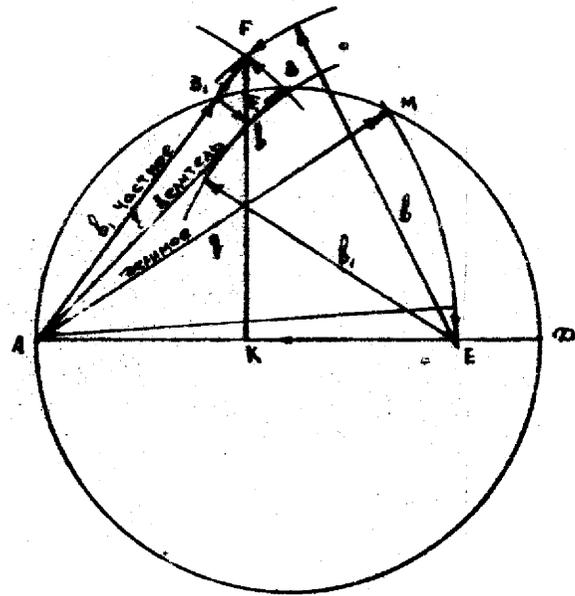


Рис. 4



МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ НА ТИ  
под редакцией к.т.н. Сивкова Г.Ф.  
Составитель: к.т.н., Г.Ф. Сивков

Рецензент Г.Ф. Сивков

---

Выпущено в свет 22.05.90г. Издательство 1/16  
Изд. 1,3 Ра-милл. 1,3 Цена 100 Стр. 79  
Издательство «Информационный союз» г. Минск, 2  
Издательство «Информационный союз» г. Минск

---